Université Mohammed V- Agdal
M. ABD-LEFDIL
Département de Physique

Année universitaire 06-07

Groupe de TD :

Mécanique quantique- Contrôle continu N° 2
SM- SMI 3

I- Soit un opérateur linéaire A ayant un vecteur propre $|\phi\rangle$ avec la valeur propre a.
Soit un deuxième opérateur linéaire B tel que : $[A,B]=B+2BA^2$
Montrer que $(B|\phi\rangle)$ est vecteur propre de A avec la valeur propre qu'on déterminera.

$[A,B]|\phi\rangle = (B+2BA^2)|\phi\rangle$

$AB|\phi\rangle - BA|\phi\rangle = B|\phi\rangle + 2BA^2|\phi\rangle$ $\quad A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$

$A(B|\phi\rangle) - Ba|\phi\rangle = B|\phi\rangle + 2Ba^2|\phi\rangle$

$A(B|\phi\rangle) - a(B|\phi\rangle) = B|\phi\rangle + 2a^2(B|\phi\rangle)$

$A(B|\phi\rangle) = (a+1+2a^2)(B|\phi\rangle)$

$B|\phi\rangle$ est bien vecteur propre de A avec la valeur propre $(1+a+2a^2)$

II- Un oscillateur harmonique est initialement dans l'état : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\{2|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\}$

Où $|\psi_n\rangle$ sont les solutions de l'équation de Schrödinger pour $V(X) = \frac{1}{2}m\omega^2X^2$

Si vous mesurez l'énergie du système, quelles sont les énergies permises ainsi que les probabilités pour obtenir chacune d'elle.

On rappelle que : $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ avec $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

Vue l'expression de $|\Psi\rangle$, seules les énergies E_2 et E_3 correspondant (respectivement) à $|\Psi_2\rangle$ et $|\Psi_3\rangle$ sont permises

$E_2 = \hbar\omega(2+\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}\hbar\omega$

$E_3 = \hbar\omega(3+\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}\hbar\omega$

Probabilité d'avoir E_2 = $P(E_2) = |\langle\Psi_2|\Psi\rangle|^2 = \frac{4}{5}$

Probabilité d'avoir E_3 = $P(E_3) = |\langle\Psi_3|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{5}$

III- On considère le potentiel V(x) suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \quad \textbf{(région 1)} \\ -V_0 & \text{si } 0 < x < a \quad \text{(région 2)} \\ +\infty & \text{si } x > a \quad \textbf{(région 3)} \end{cases}$$ V_0 et a sont des constantes positives.

On s'intéressera seulement aux états liés pour lesquels l'énergie totale $-V_0<E<0$

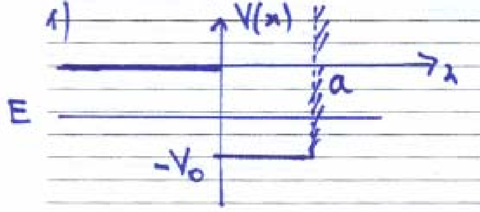
1- Représenter la courbe V(x).

2- Résoudre l'équation de Schrödinger dans les différentes zones.

On posera: $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$ et $k_2 = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

3- Ecrire les équations de continuité

1)



2) $x<0$: $V(x)=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_1''(x) = E\phi_1(x)$$

$$\phi_1''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi_1(x) = 0$$

$$\phi_1''(x) - K_2^2\,\phi_1(x) = 0$$

$$\phi_1(x) = Ae^{K_2 x} + Be^{-K_2 x}$$

Comme $\phi_1(x)$ doit être bornée,

$\lim_{x\to -\infty}\phi_1(x) = 0$: $B=0$

il reste : $\phi_1(x) = Ae^{K_2 x}$

* $0<x<a$:

$$\phi_2''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)\phi_2(x) = 0$$

$$\phi_2(x) = Ce^{iK_1 x} + De^{-iK_1 x}$$

* $x>a$

$$\phi_3(x) = 0$$

la barrière est infinie, la particule ne peut pas exister dans cette région.

3) on a :

i) $\phi_1(0) = \phi_2(0) \Leftrightarrow A = C+D$

ii) $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) \Leftrightarrow AK_2 = iK_1(C-D)$

iii) $\phi_2(a) = \phi_3(a) \Leftrightarrow$

$$Ce^{iK_1 a} + De^{-iK_1 a} = 0$$